天文航海學講義

商船系統工程實驗室

Merchant Marine System Engineering Laboratory

基隆市北寧路二號　海洋大學商船學系七樓

Add : Merchant Marine Department,
National Taiwan Ocean University
2, Pei-Ning Road, Keelung, Taiwan

Tel : 886-2-24622192 ext 3032

第0章、預備知識

0.1 基本定義

1. 航海與其相關名詞定義

(1) 航海（Navigation）：導引（direct）運具將人或物從一地移送另一地，安全且經濟的過程。

(2) 交通（Traffic）：運具或行人在某地的運動現象（phenomena）及與此運動有關的措施。

(3) 運輸（Transportation）：使用運具將人或物從一地移送另一地，安全且經濟的一種社會經濟活動（social-economic activities）。

思考：

(1) 試述航海、交通及運輸等三者之關係。

(2) 我國交通部的英文名稱為 Ministry of Transportation and Communication，簡稱為 MOTC。你的看法為何？又你對 Communication 的定義為何？

(3) 目前國內交通運輸相關系所，有些更名為「物流」相關名稱，請問何謂物流（Logistics）？

2. 航海的探討主題

從航海的定義可知，最重要的準則是安全，而其重點在於導引運具，最後再考量經濟準則，準此，其探討的重要性依序為為船位、航向和航程。

註：航海常用單位

(1) 長度單位：浬（nautical mile；mile, M；mi；nm），1 浬可換算為 1852 公尺（m）或 6076.1 英呎（ft）或 2000 碼（yard）。又 1 鏈（Cable）為 0.1 浬。

(2) 速度單位：節（knot, kt；kn）定義為（浬/小時）。

3. 航海的分類

航海首要任務在於船位的決定。以定位所用之方法、目標或儀器之不同可分類如下：

(1) 推算船位（Dead Reckoning）：以本船的航向、航速和時間推算船位之航海。

(2) 引航 （Piloting）：使用陸標 （Landmark）、助航設備 （Aids to Navigation, ATN）及測深（Depth Sounding）等決定船位之航海。

(3) 天文航海（Celestial Navigation）：經由觀測天體，如太陽、月球、行星及恆星等來決定船位之航海。

(4) 電子航海（Electronic Navigation）：利用電子航儀所獲得之資料決定船位之航海。

註：

(1) 實務上，航行期間係交互使用上述四種方法。

(2) 推算船位與引航學是屬於地文航海（Geo-Navigation）的範疇。

(3) 推算，其英文名稱之演化為 Deduced（推算）、Ded，最後為 Dead。

0.2 基本數學－球面三角學

在空間的各種各樣幾何圖形中，至精至簡者首推三角形，而空間概分為歐式、球及雙曲（非歐）等三種空間，它們具有同樣的高度對稱性；又三角形的基本結構在於它的三邊及三角之間的函數關係，即是正弦律和餘弦律，此兩個三角律則為解析幾何中的基因碼（Genetic Codes）。

三角形在不同空間所呈現的基本性質不再相同，如歐式平面三角形的內角和為 180 度，球面三角形的內角和恆大於 180 度，而雙曲三角形的內角和則恆小於 180 度。然從對稱性為基點作比較分析，可發現一有趣的性質：統一正弦律學說（發現者 Janos Bolyai），表示如下：

$$\frac{\sin\alpha}{@a}=\frac{\sin\beta}{@b}=\frac{\sin\gamma}{@c}$$

其中，在平面三角形中，@為 1；在球面三角形中，@為正弦函數（sin）；在雙曲三角中，@為雙曲正弦函數（sinh）。

球面三角學係探討球面三角形的三邊及三角的函數關係，它是航海學的核心理論。首先定義球面三角形，繼而介紹極對偶性，而後應用向量代數推導球面三角的基因碼，即是正弦律和餘弦律，最後分述球面三角的各種常用公式。各公式間的關係如圖 0-1 所示。

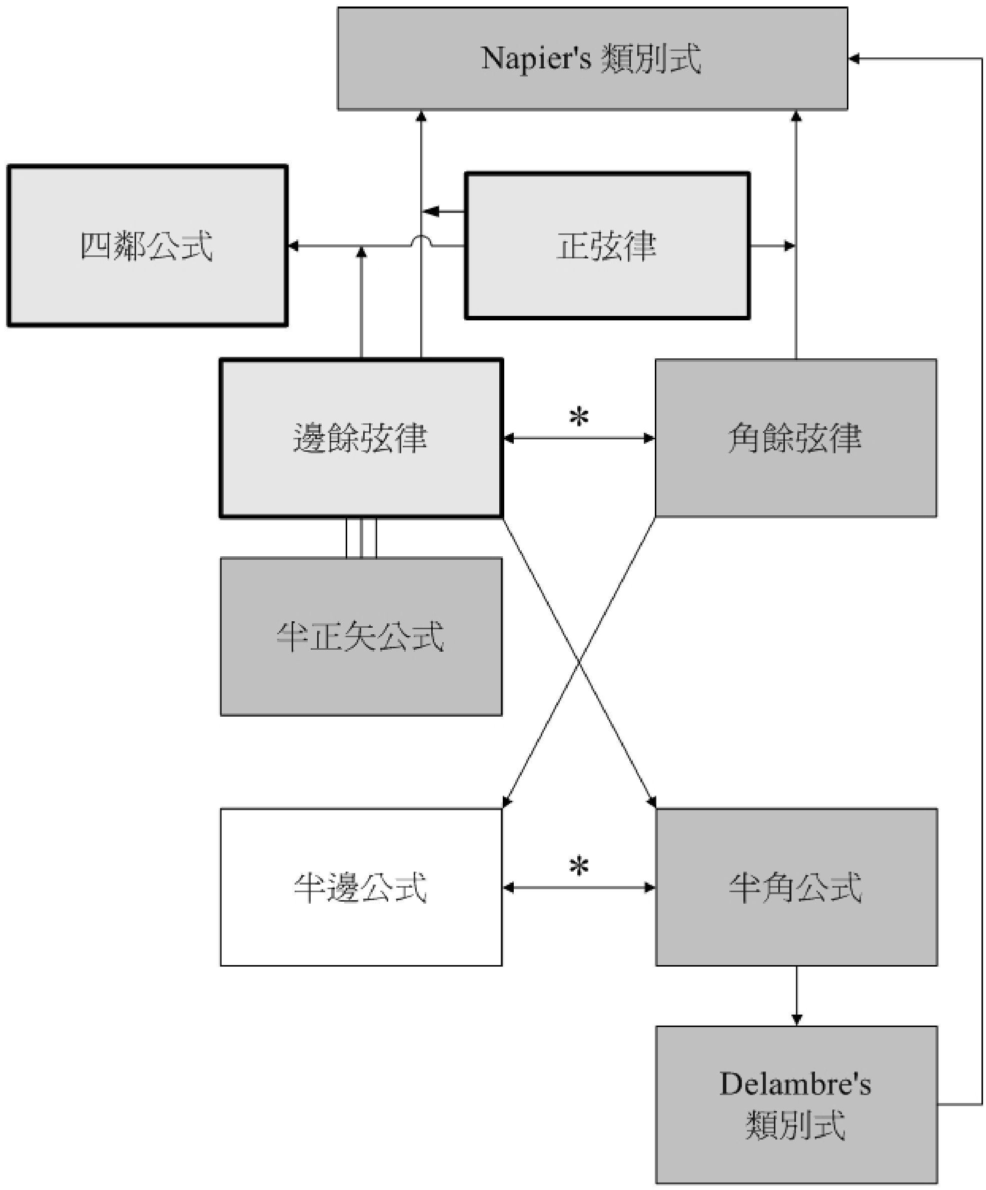


圖 0- 1 球面三角公式關係圖

註：＊為極對偶引理，≡為等價關係。

1. 球面三角形定義

球面上非對頂的三點且三點不在同一大圓上，則此三點可構成一球面三角形（$\widehat{\Delta}$ABC），簡稱為**球三**，如圖 0-2 所示。

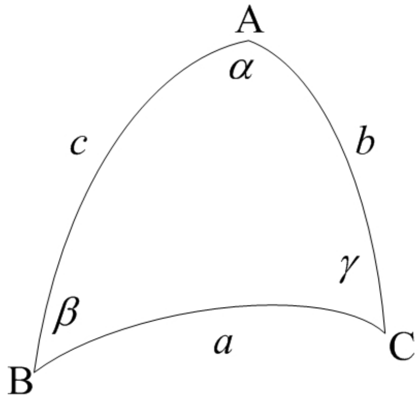


圖 0- 2 球面三角形 ABC

其中，A、B、C 為球三的頂點，a、b、c 為球三的邊，α、β、γ 為球三的角（兩面角）。

2. 極對偶性（Polar Duality）

(1) 性質：互為極對偶的一對球三，$(\widehat{\Delta}A'B'C')' = \widehat{\Delta}ABC$。

(2) **極對偶定理**（Polar Duality Theorem）：設 $\widehat{\Delta}ABC$ 與 $\widehat{\Delta}A'B'C'$ 互為極對偶的一對球三，他們的三邊三角分別 a、b、c 和 α、β、γ 及 a′、b′、c′和 α′、β′、γ′，則有關係式如下：

$$a'+\alpha = b'+\beta = c'+\gamma = \pi$$

$$a+\alpha' = b+\beta' = c+\gamma' = \pi$$

推論：

(1) 若 $\widehat{\Delta}A_1B_1C_1$ 與 $\widehat{\Delta}A_2B_2C_2$ 的三內角對應相等，則他們的三邊必對應等長，所以他們是全等。在球三中，AAA 亦為疊合定理。

(2) 球三的公式中，凡涉及角與邊的互換必用極對偶定理，在原球三上的公式和其在極對偶球三上的表現公式，兩者角邊可互換且對應。

3. 基因碼公式

(1)　球三正弦律（Sine Law）

$$\frac{\sin\alpha}{\sin a}=\frac{\sin\beta}{\sin b}=\frac{\sin\gamma}{\sin c}$$

(2)　球三邊餘弦律（Side Consine Law）

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$$
$$\cos b=\cos a\cos c+\sin a\sin c\cos\beta$$
$$\cos c=\cos a\cos b+\sin a\sin b\cos\gamma$$

4. 基因碼公式之證明（向量代數法）

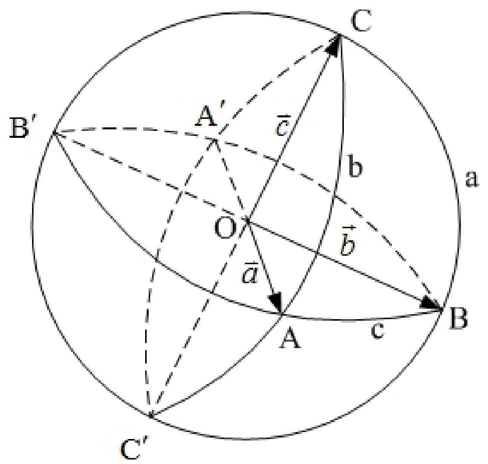


圖 0- 3 球面三角形向量示意圖

如圖 0-3，設 O 為單位球之球心，A, B, C 是$\hat{\Delta}$ABC 之頂點，令$\overline{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overline{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overline{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，又 a, b, c 分別為$\hat{\Delta}$ABC 中 A, B, C 之對邊弧長。

可知 $$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos c, & \vec{b}\cdot\vec{c}=\cos a, \quad \vec{a}\cdot\vec{c}=\cos b\\ |\vec{a}\times\vec{b}|=\sin c, & |\vec{b}\times\vec{c}|=\sin a, \quad |\vec{c}\times\vec{a}|=\sin b\end{cases}$$

(1) 向量外積證明**正弦律**

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\times\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|\sin\alpha\,\vec{a}$$ ……………（幾何定義）

$$=\left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]\vec{a}-\left[\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\right]\vec{c}=\left(\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,\right)\vec{a}$$ ……………（代數定義）

上兩式可得 $\sin c\cdot\sin b\cdot\sin\alpha=\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\,\right)$，

同理，$\begin{matrix}\sin a\cdot\sin c\cdot\sin\beta=\left(\vec{b}\vec{c}\vec{a}\right)\\ \sin b\cdot\sin a\cdot\sin\gamma=\left(\vec{c}\vec{a}\vec{b}\right)\end{matrix}$，

上述三式相等，各式之左式同除 $\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c$，

可得 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin a}=\dfrac{\sin\beta}{\sin b}=\dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$ 。

(2) 向量內積證明**邊餘弦律**

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\left|\vec{a}\times\vec{c}\right|\cos\alpha=\sin c\cdot\sin b\cdot\cos\alpha$$ ………（幾何定義）

$$=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{c}\\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cos b\\ \cos c & \cos a\end{vmatrix}=\cos a-\cos b\cdot\cos c$$ ………（代數定義）

由上兩式可得，$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$ 。

說明：邊餘弦律之用途有二：

(1) 原型 $\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin c\cos\alpha$ ，係已知球三兩邊夾一角，求第三邊。

(2) 變形 $\cos\alpha=\dfrac{\cos a-\cos b\cos c}{\sin b\sin c}$ ，則是已知球三之三邊，求任一角。

5. 球三角餘弦律（Angle Consine Law）

$$\cos\alpha=-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma\cos a$$
$$\cos\beta=-\cos\alpha\cos\gamma+\sin\alpha\sin\gamma\cos b$$
$$\cos\gamma=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cos c$$

說明：使用球三邊餘弦律與極對偶定理可推導得證。

6. 球三四鄰公式（Four-parts Formulae）

$\cos\alpha\cos c = \cot b\sin c - \cot\beta\sin\alpha$

$\cos\alpha\cos b = \cot c\sin b - \cot\gamma\sin\alpha$

$\cos\beta\cos a = \cot c\sin a - \cot\gamma\sin\beta$

$\cos\beta\cos c = \cot a\sin c - \cot\alpha\sin\beta$

$\cos\gamma\cos b = \cot a\sin b - \cot\alpha\sin\gamma$

$\cos\gamma\cos a = \cot b\sin a - \cot\beta\sin\gamma$

說明：

(1) 環繞球三的兩邊及兩角關係式。

(2) 四鄰公式由**邊餘弦律**與**正弦律**可推導得證。

(3) 球三中，任選四個變數建構的關係式，計有 15 式，其中，**正弦律**、**邊餘弦律**及**角餘弦律**各有 3 式，另**四鄰公式**則有 6 式。

7. 球三半邊公式（Half Side Formulae）

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

$$\tan\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{-\cos S\cos(S-\alpha)}{\cos(S-\beta)\cos(S-\gamma)}}$$

其中，$S = \dfrac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$ 。

說明：使用球三**半角公式**和**極對偶定理**可推導得証；亦可使用三角函數中**半角公式**和球三**角餘弦律**推導。

8. 球三半角公式（Half Angle Formulae）

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(S-b)\cos(S-c)}{\sin b\sin c}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin S\sin(S-a)}{\sin b\sin c}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\sin(S-b)\sin(S-c)}{\sin S\sin(S-a)}}$$

其中，$S=\dfrac{a+b+c}{2}$。

說明：使用球三**半邊公式**和**極對偶定理**可推導得証；亦可使用三角函數中**半角公式**和球三**邊餘弦律**推導。耐人尋味的是，平面三角形半角公式中涉及邊長的地方改用其 sin 值，則可得球三**半角公式**。

9. 球三半正矢公式（Haversine Fourmulae）

(1) 便於球三之解算；早期（未發明計算器之前）航海人員製表（Table）並採對數（Log）運算，然而球三餘弦律中，當 θ：90°-180°時，其餘弦函數(cos)值為負值，而對數中之真數不可為負，不適合對數運算，據此，須製造一其值恒正之函數。即為半正矢函數：

$$\text{Haversine } X=\text{Hav } X=\frac{1}{2}(1-\cos X)$$

(2) 半正矢公式（原型）

$$\begin{aligned}\text{Hav}a&=\text{Hav}(b\sim c)+\sin b\cdot\sin c\cdot\text{Hav}\alpha\\ \text{Hav}b&=\text{Hav}(a\sim c)+\sin a\cdot\sin c\cdot\text{Hav}\beta\\ \text{Hav}c&=\text{Hav}(a\sim b)+\sin a\cdot\sin b\cdot\text{Hav}\gamma\end{aligned}$$

(3) 半正矢公式（變型）

$$\text{Hav}\alpha=\frac{\text{Hav}a-\text{Hav}(b\sim c)}{\sin b\cdot\sin c}$$

$$\text{Hav}\beta=\frac{\text{Hav}b-\text{Hav}(a\sim c)}{\sin a\cdot\sin c}$$

$$\text{Hav}\gamma=\frac{\text{Hav}c-\text{Hav}(b\sim a)}{\sin b\cdot\sin a}$$

說明：半正矢公式之本質即為**邊餘弦律**。

10. Delambre's 類別式（Delambre's Analogies）

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{c}{2}=\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{c}{2}=\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

說明：

(1) 使用三角函數**和角公式**與球三**半角公式**可推導得證。

(2) 該式具有「**輪換對稱**」性質。

11. Napier's 類別式（Napier's Analogies）

$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\frac{c}{2}$$

$$\tan\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\cot\frac{\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\tan\frac{c}{2}$$

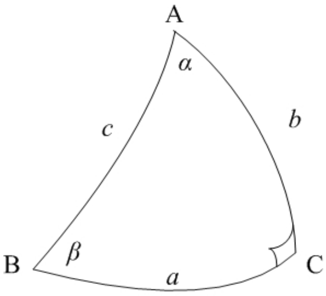
說明：使用 **Delambre's 類別式**可推導得證。

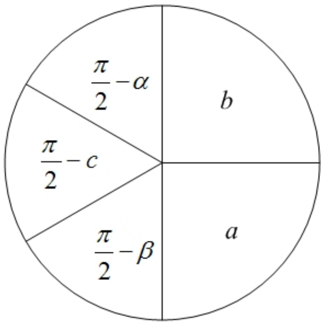
12. 特殊球三之公式

(1) 納皮爾法則（Napier’s Rule）記憶口訣

納皮爾法則 1：本部正弦＝對部餘弦之積
納皮爾法則 2：本部正弦＝鄰部正切之積

(2) 於直角球三（球面三角形中某一角為 *90°*）中下列各公式恆成立：

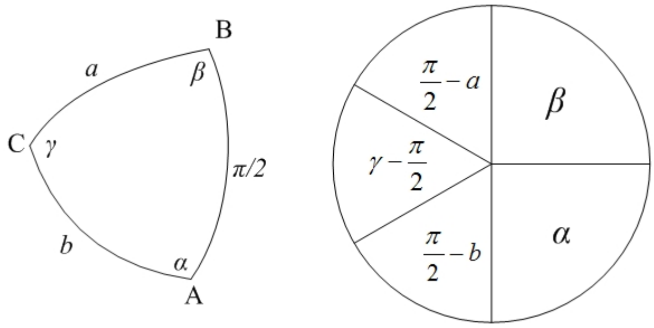




納皮爾法則 1：
$$\begin{cases} \sin a = \sin\alpha \sin c \\ \sin b = \sin\beta \sin c \\ \cos c = \cos a \cos b \\ \cos\alpha = \sin\beta \cos a \\ \cos\beta = \sin\alpha \cos b \end{cases}$$

納皮爾法則 2：
$$\begin{cases} \tan a = \tan\alpha \sin b \\ \tan b = \tan\beta \sin a \\ \cos c = \cot\alpha \cot\beta \\ \tan a = \cos\beta \tan c \\ \tan b = \cos\alpha \tan c \end{cases}$$

(3) 於象限球三（球面三角形中某一邊為$90°$）中下列各公式恆成立：



納皮爾法則 1：
$$\begin{cases} \sin\alpha = \sin a \sin\gamma \\ \sin\beta = \sin b \sin\gamma \\ \cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta \\ \cos a = \sin b \cos\alpha \\ \cos b = \sin a \cos\beta \end{cases}$$

納皮爾法則 2：
$$\begin{cases} \tan\alpha = \tan a \sin\beta \\ \tan\beta = \tan b \sin\alpha \\ \cos\gamma = -\cot a \cot b \\ \tan\alpha = -\cos b \tan\gamma \\ \tan\beta = -\cos a \tan\gamma \end{cases}$$

說明：變數個數愈少所形成的關係式，在實用上具有彈性優勢，準此，**納皮爾法則**在航海學的應用相當廣泛。

第1章、天文航海基本概念

1. 天文航海（Celestial Navigation）：經由觀測天體，如太陽、月亮、行星及恆星等來決定船位之航海。
2. 天文航海主要探討重點為：
   (1) 測天體高度並記錄觀測時間，以定船位。
   (2) 測天體方位並記錄觀測時間，以校正羅經。
3. 天球（Celestial Sphere）：以地球為球心，無窮遠為半徑之球面，假設所有天體附在其上。
4. 由於地球自西向東自轉（Rotation），使天球上所有天體產生自東向西之視運動（Apparent Motion）。
5. 天文航海使用之座標系統：
   (1) 天赤道座標系統。
   (2) 天水平座標系統。

   註：上述兩座標系統可合併為**天子午線平面圖**。

1.1 地球座標系統

1. 軸（Axis）：地球據以自轉的軸。
2. 赤道（Equator）：垂直於地軸之大圈。
3. 緯度平行圈（Parallel of Latitude）：平行於赤道的小圈。
4. 子午線（Meridian）：過地極之大圈，可分為上部（Upper Branch）與下部（Lower Branch），過格林威治（Greenwich）天文台原址的子午線稱為格林威治子午線，又因其為量度經度之基準線；故又稱基準子午線（Prime Meridian）。
5. 緯度（Latitude, L；Lat）：該地在赤道之北或南的角距離（Angle Distance）。

   量度：從赤道向北或南，沿子午線量至該地之緯度平行圈。

   範圍：$0^\circ \sim 90^\circ$ N/S。
6. 經度（Longitude, λ；Long）：該地在基準子午線之東或西的角距離。

   量度：從格林威治子午線向東或向西，沿赤道量至該地之子午線。

   範圍：$0^\circ \sim 180^\circ$ E/W。
7. 緯度差（Difference of Latitude）：兩地緯度差，其表示符號為（ℓ）。若兩地同名，則相減；若異名，則相加。
8. 經度差（Difference of Longitude）：兩地經度差，其表示符號為（DLo）。若兩地同名，則相減；若異名，則相加。

1.2 天赤道座標系統

1. **天赤道座標為地球座標之擴大**，如圖 1-1 所示。其與地球座標之對應關係如表 1- 1 所示。

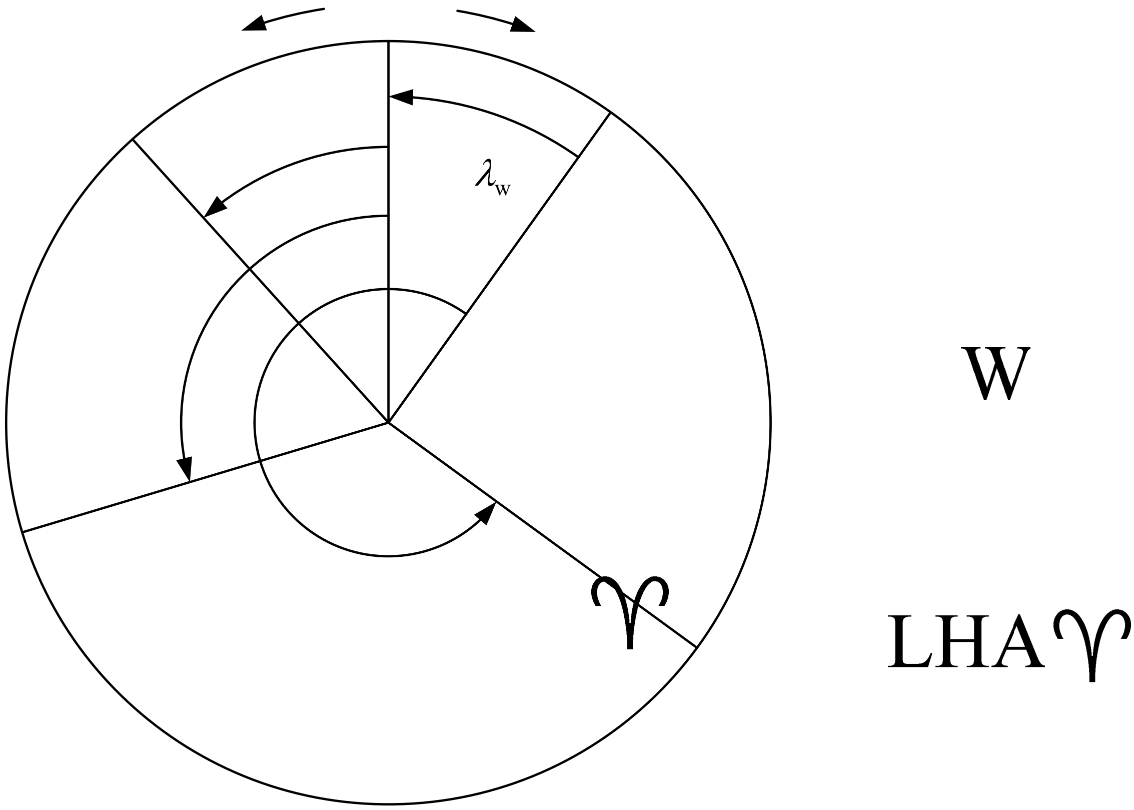


圖 1- 1 天赤道平面投影圖

表 1- 2 地球座標與天赤道座標對照表

地球座標	天赤道座標
赤道	天赤道（Celestial Equator Q）
緯度平行圈	赤緯平行圈（Parallels of Declination）
北（南）極	天北（南）極（Celestial Pole）
子午線	天子午線（Celestial Meridian）

2. 天赤道平面投影圖屬於極正射切面投影，可用以說明各時角之關係，如圖 1- 1 所示。
3. 時圈（Hour Circle）：在天球上，過天體與天極，並隨天體運轉之大圈。
4. 天子午線與時圈之區別：
   (1) 真運動時，天子午線由西向東轉；時圈不動。
   (2) 視運動時，天子午線不動；時圈則由東向西轉。
   (3) 天子午線上未必有天體；時圈上必有天體。

5. 赤緯（Declination, Dec；d）：
量度：天體在天赤道之北或南的角距離，以 N 或 S 表其名。
範圍：000° ~ 090°（N/S）。
6. 格林威治時角（Greenwich Hour Angle, GHA）：
量度：天體時圈在格林威治天子午線之西的角距離。
範圍：000° ~ 360° 。
7. 當地時角（Local Hour Angle, LHA）：
量度：天體時圈在當地天子午線之西的角距離。
範圍：000° ~ 360° 。
8. 子午角（Meridian Angle, t）：
量度：天體時圈在當地天子午線之東或西的角距離。
範圍：000° ~ 180°（E/W）。
當地時角與子午角的關係為：
(1) 若 $\mathrm{LHA} < 180°$ 則 $t_W = \mathrm{LHA}$ ；
(2) 若 $\mathrm{LHA} > 180°$ 則 $t_E = 360° - \mathrm{LHA}$ 。
9. 恆星時角（Sidereal Hour Angle, SHA）：
量度：天體時圈在春分點時圈之西的角距離。
範圍：000° ~ 360° 。
10. 赤經（Right Ascension, RA）：
量度：天體時圈在春分點時圈之東的角距離。
範圍：000° ~ 360° 。
恆星時角與赤經之關係為：$\mathrm{RA} + \mathrm{SHA} = 360°$ 。
11. 天赤道座標系統，描述位置之變數為赤緯（Dec）與子午角（*t*）

1.3 天水平座標系統

1. **以觀測者為主之座標系統。**
2. 天頂（Zenith, Z）：由觀測者向頭頂方向延伸交天球上之點。
3. 天底（Nadir, Na）：由觀測者向腳底方向延伸交天球上之點。
4. 天水平面（Celestial Horizon）：過地心與天頂、天底之連線垂直之平面。
5. 高度平行圈（Parallel of Altitude）：平行於天水平面之小圈。
6. 垂直圈（Vertical Circle)：與天水平面垂直且過天頂、天底、天體之大圈。
7. 主垂直圈（Principal Vertical Circle)：通過天北極與天南極之垂直圈。
8. 卯酉圈（Prime Vertical Circle)：經過觀測者正東與正西兩點之垂直圈。
9. 高度（Altitude, H）：天體在天水平上的角距離。
10. 方位（Azimuth, Zn）：
量度：由正北沿天水平面順時針量至天體之真方位。
範圍：000° ~ 360° 。

11. 方位角（Azimuth Angle, Z；Az）：
量度：天體在正北或正南之東或西的角距離。
範圍：000°～180°，其前名與緯度同名，後名與子午角同名。
方位與方位角之關係為：
Zn = (N / S) Z (E/W) 。

12. 天水平座標系統，描述位置變數為高度（H）和方位角（Az）

1.4 天文三角形

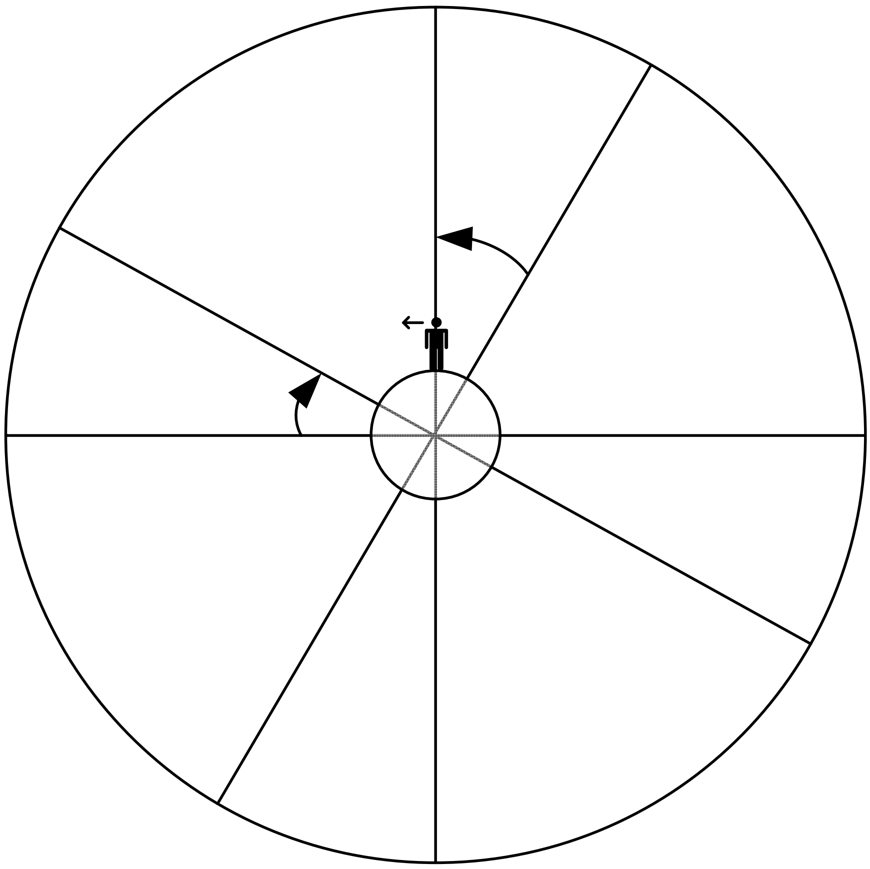


圖 1- 2 天子午線平面圖

1. 天子午線平面圖為天赤道座標系統及天水平面座標系統之合併，其概念為「**天（仰）極的高等於觀測者的緯度**」。如圖 1-2 所示。

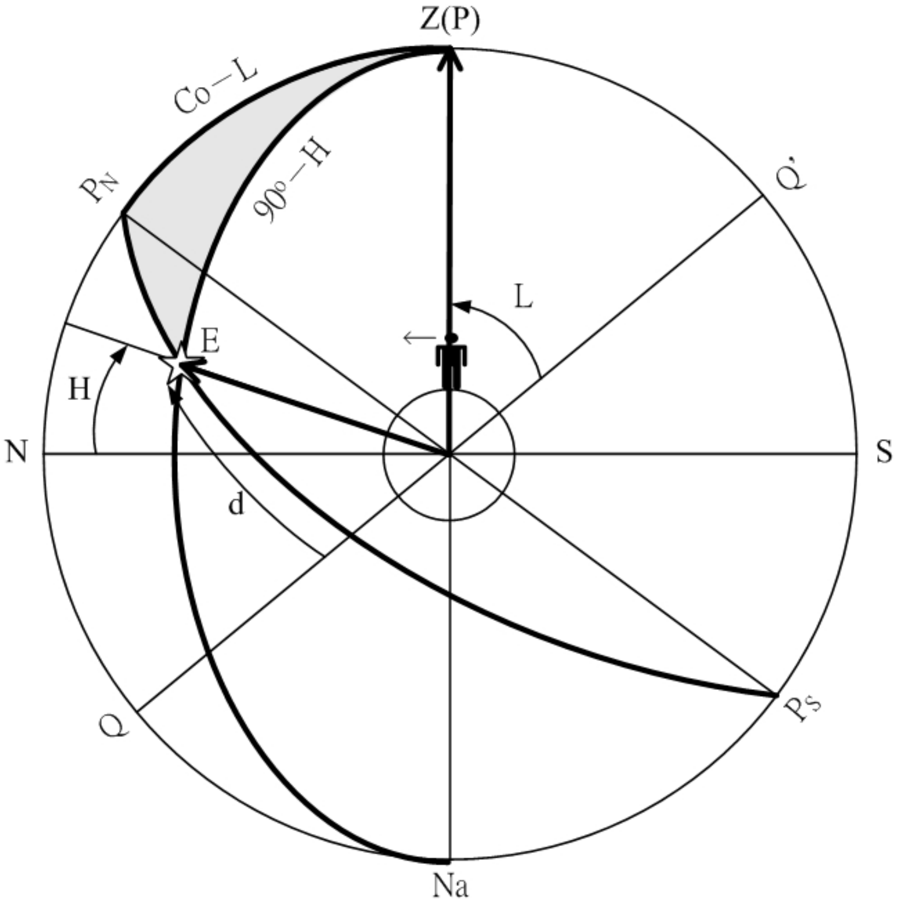


圖 1- 3 天子午線平面圖中天文三角形示意圖

2. 天文三角形係由天子午線、天體時圈及垂直圈等建立，如圖 1-3 所示。其中，

(1) 三頂點分別為天極（Celestial Pole）、天頂（Zenith）、天體位置（Celestial Body）。

(2) 三邊分別為餘緯（Co-Latitude, Co-L）、與天頂距（Zenith Distance, zd）、極距（Polar Distance, pd）。

(3) 三角分別為子午角（t）、方位角（Z）、天體角（Parallatic Angle）。

說明：

(1) 天赤道與天水平合併為天子午線平面圖，其概念為「天極的高度等於觀測者的緯度」。

(2) 天子午線平面圖是分析天體視運動的重要工具。

(3) 餘緯：天極與天頂的角距離（大圈弧），如圖 2-18，$Co-L=P_NZ$。

(4) 極距：天體至天極的角距離（大圈弧），如圖 2-18，$zd=90^o-H$。

(5) 天頂距：天體至天頂的角距離（大圈弧），如圖 2-18，$pd=90^o\mp d$。

思考：極距可否稱為餘赤緯？若否，為什麼？

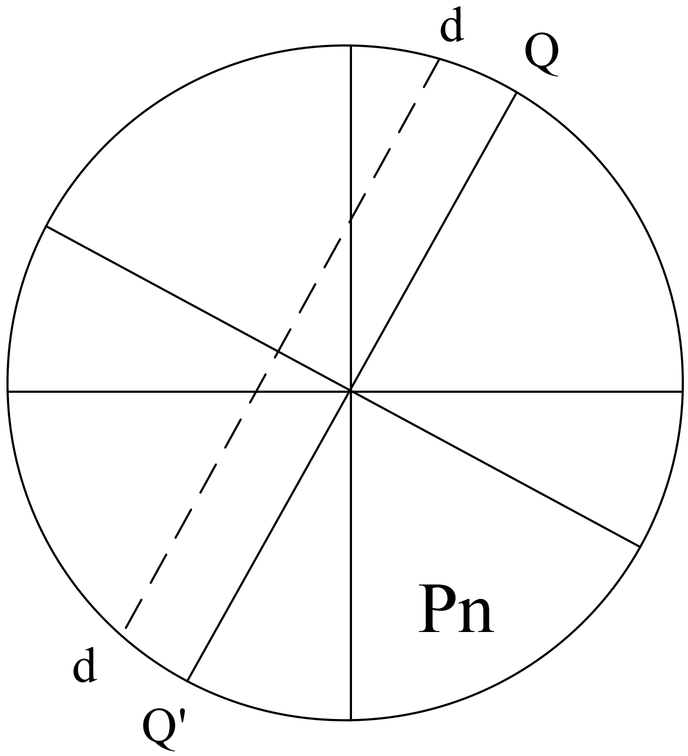


圖 1-4 天子午線平面圖

例題：設觀測者緯度30°N，當天體之赤緯為23.5°N時，如圖 1-4 所示，有下列情況。

(1) 天體約出於東北方，約沒於西北方。

(2) 天體過卯酉圈時在天水平面之上，故該天體可見。

(3) 如果天體為太陽則晝長夜短。

(4) 如天體在天子午線（即中天）時，其天頂距小於緯度，且其方位為正南。

第2章、測天解算法

天文航海的主要工作在於觀測天體，如太陽、月亮、行星和恆星等來決定船位。從歷史角度言之， 該工作在實際上變為具體可行，仰賴著兩大發明，一為英國人 John Harrison 發明天文鐘（Marine Chronometer），其解決了天文觀測無法求得經度的問題；另一則是法國人 Commander Marcq de St.-Hilaire，在西元 1875 年提出截距法（Intercept Method）或稱為高度差法（Altitude Difference Method），使得天文觀測決定船位獲得全面性的實現。許多學者在截距法的理念下，不論是直接或間接，提出很多方法論和其計算表，更使得截距法彷彿是測天解算法（Sight Reduction Method）的另一代名詞。

從嚴謹學理來分析截距法，假設位置（Assumed Position, AP）的選擇對所求得天文觀測船位（Astronomical Vessel Position, AVP）影響很大，其本質即是一個嘗試錯誤法（Trial-and-Error Method）。因此，欲求得更準確的天文觀測船位，唯有透過迭代計算法（Iteration Method）方可獲得。

2.1 測天解算法文獻回顧

首先闡述主要測天解算法的理論，繼而說明在早期尚未發明計算器（機）時，伴隨截距法的理念下所發展的各種計算方法論之概念，最後則回到起初對截距法進行評析。

1. 測天解算法的理論

目前，不論商船教育訓練或海上實務作業均使用測天解算法來處理天文航海的主要工作。測天解算法是依天文觀測所得的資訊來建立天文位置線的推論過程，而其必要資訊則有**觀測時間**及**天體的觀測高度（Observed Altitude, Ho）**。一般而言，有兩種方法，即**高高度觀測**（High Altitude Observation）和**截距法**（Intercept Method），本質上，前者為直接圖解法，而後者則是計算附加圖解法。

從學理上言之，位置線的原始概念來自於等高度（Circle of Equal Altitude），即以天體的地理位置（Geographical Position, GP）為圓心，觀測餘高（Co-altitude）為半徑所形成的天體位置圈直接繪製於海圖上，然由於**作圖困難**和**該位置圈在麥氏海圖（Mercator Chart）上的變形（Distortion）**等兩大理由，使得等高度圈的概念，僅適用於高高度觀測（一般在觀測高度大於 87 度以上方可實施）。而截距法的提出，將等高度圈的概念不僅得以延續而且具體發揮其效果，並使得天文觀測來決定船位的構思得以實踐。

高高度觀測係繪製天文位置圈（Celestial Circle of Position, COP），其要素為天體的地理位置和其觀測餘高，而其推論過程整理繪製如圖 2-1 所示。而截距法則是繪製天文位置線（Celestial Line of Position, LOP），其要素為假設位置，計算方位線和截距，推論過程則整理繪製如圖 2-2 所示。在圖 2-1 和圖 2-2 中，必須提出說明的是，觀測高度（Ho） 係由六分儀

觀測高度（hs）經由器差（Instrumental Error）修正如器差修正量（I）和指標修正量（IC）等以及光學自差（Optical Deviations）修正如傾角修正（Dip）和折射（Refraction）等換算求得；另透過航海曆（Nautical Almanac, N.A.）或相關軟體，則可依觀測時間獲得任一天體的天赤道座標系統的位置量數：赤緯（Dec）和格林威治時角（GHA）。

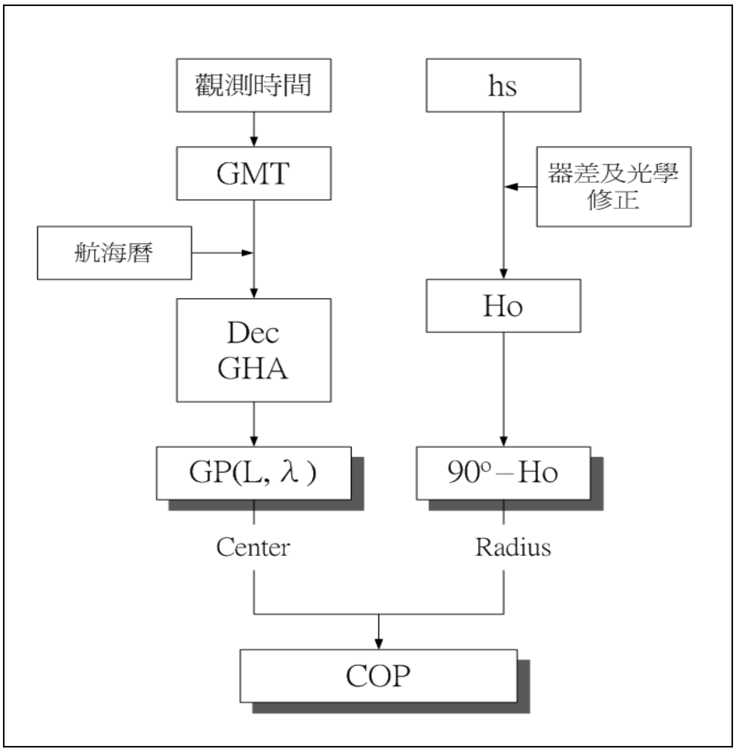


圖 2- 1 天文位置圈繪製要素的推論過程

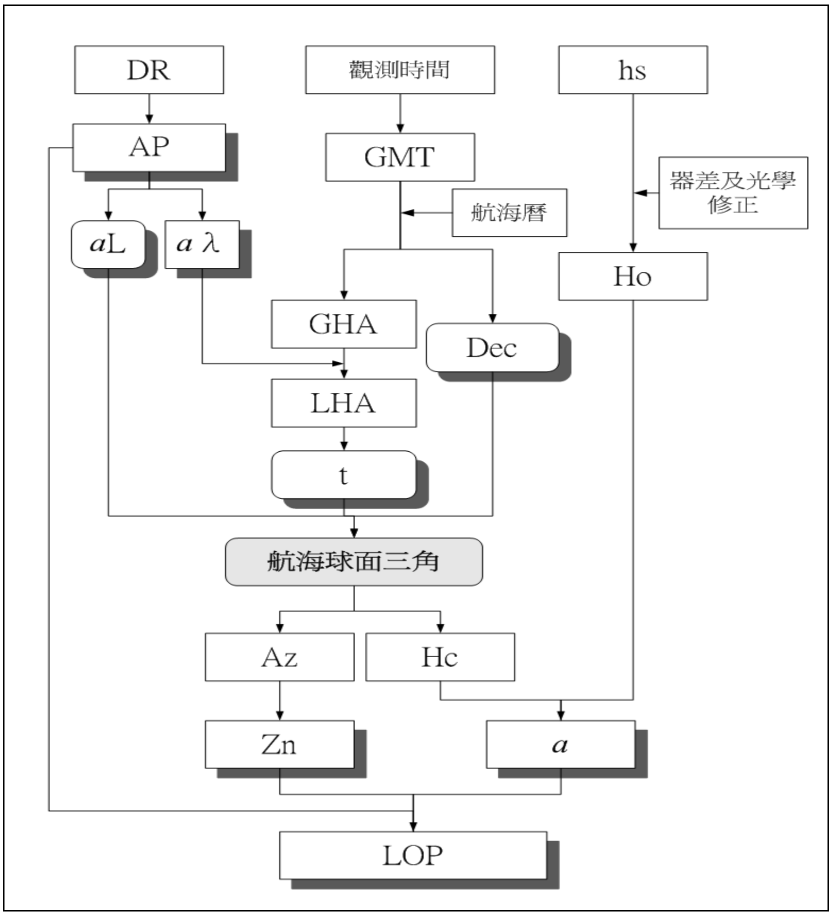


圖 2- 2 天文位置線繪製要素的推論過程

等高度圈的定位原理，係指兩個等高度圈有兩個交點，然有了推算或估計船位的判斷，便可獲得一個天文觀測船位，在觀測必然有誤差存在的事實下，三個等高度圈有三個可能天文觀測船位，而四個等高度圈則有六個可能船位，依此類推，這種「過多船位如何判定的問題」（Over-determined Celestial Fix Problem），可透過統計方法如最小平方法（Least Mean Squares Technique）等來處理。

2. 截距法理念下的計算方法論之概念

截距法理念為在推算船位（Dead Reckoning, DR）、估計船位（Estimated Position, EP）或最有可能的船位（Most Possible Position, MPP）附近選擇一假設位置（AP），並依此為參考位置，去求得計算高度和計算方位，而比較計算高度與觀測高度，其差值為截距或稱高度差(Intercept；Altitude difference, a)，據此，有了假設位置（AP），計算方位線（Zn）和截距（a），即可依此三要素繪製天文位置線。

至此，截距法的計算重點則在獲得計算高度和計算方位，因此將問題轉化為航海球三來描述，即在已知斜球三的兩邊和其夾角，求第三邊（計算餘高）和其外角（計算方位角）。求解方法一般有二，一為**直接法**（Direct Method）（或未分割的航海球三），另一則為**間接法**（Indirect Method）（或分割的航海球三）。直接法的計算公式有餘弦加半正矢公式（Cosine-Haversine Equations），典型方程組（Classic Equations）及邊餘弦加四部公式

（Cosine-Four parts Equations）等。而間接法的概念則在於分割航海球三為兩個直角球三，以便靈活使用直角球三的納皮爾法則（Napier's Rule）。該法又可細分為二，一是由天體作大圈弧線垂直於其對邊（天子午線），另一則由天頂作大圈弧線垂直於其對邊（時圈）。許多學者在此領域做了相當大的貢獻，例如：Aquino 和 Braga （巴西）；Ball、Comrie、Davis 和 Smart（英國）；Bertin、Hugon 和 Souillagouet （法國）；Fuss （德國）；Ogura 和 Yonemura（日本）；Blackburne（紐西蘭）；Pinto（葡萄牙）；Carcia （西班牙）；Ageton、Driesonstok、Gingrich、Rust 和 Weems （美國）等人。這些計算公式皆製作成計算表冊，而由於這些小表冊的簡便性，它亦被稱為簡算法（Short Method）。然為避免因使用對數或輔助函數等計算時容易發生錯誤的缺點，William Thomson（Lord Kelvin）提出視查表（Inspection Tables）的構想，於是有了 Pub. No. 214、Pub. No. 229 和 Pub. No.249 等視查表的出版。

3. 截距法評析

截距法這一巧妙構思裡中，作了兩項基本假設：一為觀測船位和假設位置對天體的地理位置的方位是相同，另一則為當餘高夠大時，可將天文位置圈視為天文位置線。準此，天文觀測船位的準確性受這兩項基本假設的影響，詳述如下：

(1) 所選擇的假設位置和真實船位，兩者距離不應超過 30 海浬，然在航海實務作業中，真實船位是未知，因此，截距法在本質上係屬於嘗試錯誤法。直言之，若在求得觀測船位之後發現與當初假設位置兩者距離超過 30 海浬，可將求得的觀測位置作為新假設位置之選擇依據，迭代計算和作圖，以提高天文觀測船位的準確性。

(2) 當觀測高度很大時，一般係指高度超過 70 度，而由於餘高越小，天文位置圈的曲率就越大，此時，在麥氏海圖上用天文位置線取代天文位置圈所產生的曲率誤差（Error of Curvature）亦相對應地增大。

2.2 天文觀測定位之演進

1. 天文觀測定位之基本觀念源自於「平面等高圈」。
2. 引進「球面等高圈」觀念，其圓心為地理位置（GP），半徑則為餘高（Co-Alt.）或稱天頂距（zd），此即為天文位置圈（COP）。
3. 承上，當天體高高度時，其方位變遷快，在中天時，連續觀測該天體 3 次以上，可獲得 3 條以上的 COP，它們的交點即為天文觀測船位（AVP），該船位屬於定位（Fix）。此過程就是「高高度觀測法」，係為直接圖解法。如圖 2-1 所示。
4. 「截距法」基本構思：於推算船位（DR）附近取一點為假設位置（AP），並計算出 AP 和 GP 之大圓弧距離，此為**計算餘高**，再將此距離與觀測餘高相比較，即可得到截距（a）。如圖 2-2 所示。有了 AP、a 及 Zn（計算方位），即可繪製天文位置線（LOP）。

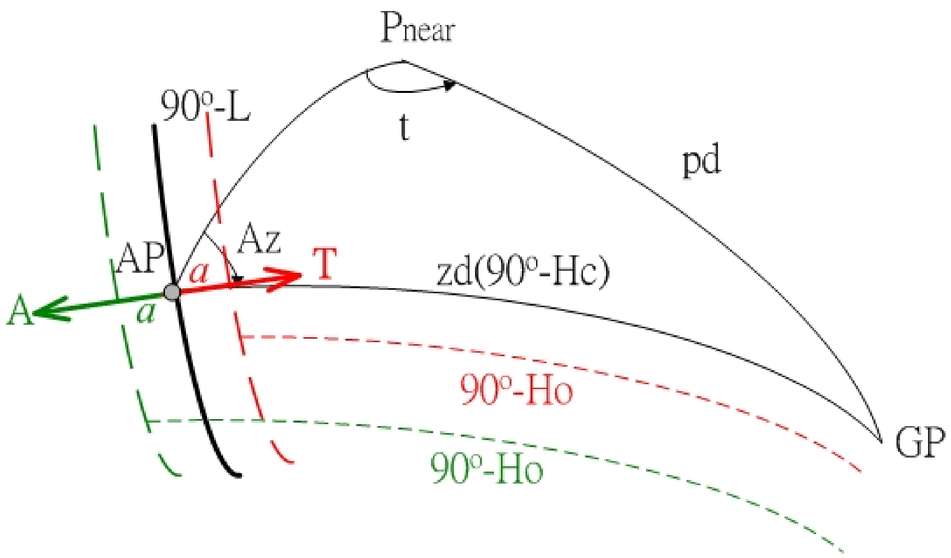


圖 2- 3 截距法繪製天文位置線示意圖

5. 承上，因餘高太大時，COP 曲率甚小，可視為 LOP；如圖 2-3 所示，當 Ho 大於 Hc 時，LOP 向（Toward）天體方位線移動「截距」長度；反之，則 LOP 離（Away）天體方位線移動「截距」長度。
6. 欲得計算高度與計算方位角，必須建立「天文三角形」，並運用「球面三角學」中相關公式求解。據此，天文航海學的核心理論是球面三角學。
7. 「截距法」的計算重心在於：於「天文三角形」中，已知緯度（L）及天赤道系統變數（t, d），計算求得天水平系統變數（Az, Hc）。如前所述，在此領域眾多方法論已被提出。

思考：

(1) 天文觀測定位，除截距法外，是否有其他思維來建構方法論？
(2) 電子航海起始構思為何？
(3) 全球定位系統（GPS）需要幾顆衛星資訊，方可決定船位？

第3章、六分儀之誤差

六分儀之光學原理為在同一平面，兩次反射光線，其最初和最後方向之夾角為兩反射面夾角的兩倍。六分儀之弧長，約為圓周的 1/6，即約 60°，故以此為名。另六分儀因其光學原理，**量測角度為兩鏡面夾角的兩倍**，因此其量測角度可達120°。

3.1 固定器差

1. 固定器差：
   (1) 分光差、刻度差與偏心差之總和，
   (2) 又稱為不能調整之誤差（Non-Adjustable Errors）。
   (3) 修正量稱為器差修正量（Instrument Correction, I），六分儀盒蓋內之證明書所記載誤差具有正負符號，即指 I。
2. 分光差（Prismatic Error）：鏡面與色鏡不平行所致。
3. 刻度差（Graduation Error）：刻度弧、測微鼓及游標之刻度不準確所致。
4. 偏心差（Eccentric Error）：指標桿之安裝未恰在刻度弧之曲度中心所致，亦稱中心差（Centering Error）。

3.2 可調整誤差

1. 垂直差（Error of perpendicularity）：係由於指標鏡與儀架不垂直所引起。
2. 邊差（Side Error）：係由於水平鏡與儀架不垂直所引起。
3. 指標差（Index Error）：當指標定於 $0°0'0''$ 時，指標鏡與水平鏡不平行所致。
4. 軸線誤差（Collimation Error）：係由於通過望遠鏡視線與儀架不平行所致。

3.3 各種修正量摘述

1. 六分儀高度修正至視高度；$hs \xrightarrow{I, IC, (PC), DIP} ha$ ；

各項修正量如表 3-1 所述。

表 3- 1 六分儀高度修正至視高度之修正量摘要表

符號名稱	正負值	引數	來源
I	±	hs	六分儀盒蓋證明書
IC	±	constant	檢驗六分儀
PC	±	constant	檢驗六分儀
Dip	－	H.E.	航海曆 A_2 頁與 xxxiv

註：

(1) 六分儀高度（Sextant Altitude, hs），於垂直面上，自觀測者眼睛至視水平線與其觀測天體視線之垂直角(即天體在視水平上高度);該天體高度係因用六分儀測得而以此為名。

(2) 視高度 （Apparent Altitude, ha），六分儀高度經器差修正（I）、指標修正（IC）及傾角修正（Dip）之後所得。

(3) 觀測高度 （Observed Altitude, Ho），六分儀高度經各種修正後之高度，相當於自地心量度所得的天體在天水線上高度。

(4) 器差修正量 （Instrument Correction, I），為不能調整之誤差（或固定器差）總和之修正量，具有正負符號。儀器出廠時，廠商會登錄於證明書上。

(5) 指標修正量（Index Correction, IC），為六分儀經各項調整後所剩餘之誤差（即可調整誤差之殘差）的修正量。

(6) 個人修正量 （Personal Correction, PC），因人而異，為個人誤差（PE）之修正量。

(7) **水平傾角**（Dip of the Horizon, D；Dip），由觀測者之天頂至視水平面間超過90° 之角距離。簡言之，即為**感覺水平與視水平之夾角**。由於與觀測者之眼高有關，故亦稱為眼高差（Height of Eye, HE）。

2. 視高度修正至觀測高度；$ha \xrightarrow{R, TB, SD, A, J, P, F, S} Ho$；

各項修正量如表 3-2 所述。

表 3- 2 視高度修正至觀測高度之修正量摘要表

<table>
<tr><th>符號名稱</th><th>正負值</th><th colspan="2">引數或成因</th><th>天體</th><th>來源</th></tr>
<tr><td>R</td><td>－</td><td colspan="2">ha</td><td>⊙、☾
☆、P</td><td>N.A. A_2 頁
☆－p cor.</td></tr>
<tr><td>T</td><td>±</td><td colspan="2">T, ha
[標準值10°C/50°F]</td><td>⊙、☾
☆、P</td><td>N.A. A_4 頁
No.9 Tab 23</td></tr>
<tr><td>B</td><td>±</td><td colspan="2">B, ha
[標準值 1010mb/29.83in]</td><td>⊙、☾
☆、P</td><td>N.A. A_4 頁
No.9 Tab 24</td></tr>
<tr><td colspan="6">注意：當 ha<10° 或溫度與氣壓與標準值差很大⇒T&B Cor.</td></tr>
<tr><td>SD</td><td>＋
－</td><td>下緣
上緣</td><td>[因天體距地球近]</td><td>⊙、☾</td><td>N.A. Daily Page</td></tr>
<tr><td>A</td><td>同 SD</td><td colspan="2">當天體距觀測者較近
且天體在較高高度時</td><td>☾</td><td>N.A. xxxiv 與 xxxv
已考量</td></tr>
<tr><td>J</td><td>－</td><td colspan="2">測太陽上緣</td><td>⊙</td><td>自 A.D. 1970 年起 N.A. 已取消或當太陽上緣⊙ha<10°
⇒J＝(-)0.8′（參考值）</td></tr>
<tr><td>P</td><td>＋</td><td colspan="2">低高度，距地球近</td><td>⊙、☾、P</td><td>1.⊙ ha<65° ⇒P＝0.1′
2. P（Venus 與 Mars）
(1)N.A. A_2 頁
☆－p cor. Add’l Cor.
(2)N.A. (p.259)
P=p cos H
3. 月亮：N.A. xxxiv 與 xxxv 頁已考量在內；查表引數 H.P.</td></tr>
<tr><td>F</td><td colspan="3">[類似：太陽和月亮 SD 修正觀念]</td><td>Venus 與 Mars</td><td>1985 年 N.A.納入（GHA, Dec）不必修正</td></tr>
<tr><td>S</td><td>＋
－</td><td colspan="2">水溫<氣溫
水溫>氣溫</td><td>⊙、☾、
☆、P</td><td>目前不必修正</td></tr>
</table>

註：

(1) 符號意義：⊙：太陽、☾：月球、☆：恆星、P：行星。

(2) 折射（Refraction, R）或稱折光差，恆為負；其理由為地球大氣層介質愈近地面，密度愈大，折射將使得天體視高度恆大於實際高度。

(3) 空氣溫度（Air Temperature, T）與大氣壓力（Atmospheric Pressure, B），兩者為大氣密度的衡量變數；由於折射修正量會隨著大氣密度而微變，準此，若 T 與 B 與標準值相差甚大，則應作 T 與 B 的修正。

(4) 視半徑（Semi-Diameter, SD），在航海曆中所列位置變數（GHA 和 Dec）均以各天體中心為準，然使用六分儀觀測太陽或月球時，難判定出其中心位置，只好選擇測其上緣或下緣，據此，對太陽或月球觀測時，需作視半徑修正（SD Cor.）。

(5) 視半徑增大（Augmentation, A），視半徑隨天體至地球上觀測者的距離而有所變化，愈近則視物體愈大。對太陽而言，SD 增值（即 A）影響很小可不計；對月球言之，航海曆中封底內頁 xxxiv 與 xxxv 頁，已考量在內。

(6) 光滲（Irradiation, J），該現象係由於眼睛對明亮物體錯覺關係，使物體看起來較實際略大。

(7) 視差 （Parallax, P），係指在不同地點觀測某一目標的方向差；由於觀測高度（Ho）係指自地心量度所得的天體在天水平線上之高度而觀測者在地表面上，因此需作視差修正。

(8) 象（Phase, F），觀測距地球較近之行星（如金星、火星），所看中心點並非行星之實際中心，類似 SD 修正概念，然自 1985 年已納入航海曆中所列位置變數，不必另加修正。

(9) 海水與空氣溫度差之修正量（Sea-Air Temperature Difference Correction, S），目前不必修正。

第4章、時間

4.1 時間類別

1. 依不同天體為基準區分：視太陽時（真太陽）、平均太陽時（假想太陽）、恆星時（恆星，大多使用♈）、太陰時（月球）。
2. 依地球面上不同子午線為記時標準來區分：格林威治時間、當地時間、區時。
3. 時間之計量：中天（Transit）係指天體跨越天子午線可分為：天體跨越天子午線之上半圈（Upper Branch），稱上中天（Upper Transit）；天體跨越天子午線之下半圈（Lower Branch），稱下中天（Lower Transit）。
4. **當天體上中天時，其** $LHA = 000°$ 或 $360°$ **；當天體下中天時，其** $LHA = 180°$ 。

注意：視太陽即是吾人所見到之真太陽；然太陽視運動中由於太陽視轉動不均勻和地球自轉軸和公轉平面垂線傾斜 $23.5°$ 等因素，故假想一個太陽，此謂之為平均太陽。

4.2 時差

視太陽時與平均太陽時之差。亦即 $GAT - GMT$ （若 $GAT > GMT$ ，時差為正；若 $GAT < GMT$ ，時差為負）或 $LAT - LMT$ 。

$$\text{Equation of Time} = \frac{GHA(A\odot) - GHA(M\odot)}{15°}$$

$$GHA\,(A\odot) = (GMT \pm 12^h + \text{時差}) \times 15°$$

題目：

(1) GMT 0600 時，太陽 GHA 266°27.5'，求該時的時差。

(2) 若已知太陽在 12^h 的時差為 $(+)09^m27^s$，求太陽中天時間（Mer. Pass. Time）及 GMT 1200 時的太陽 GHA。

4.3 GMT、LMT 和 ZT 之彼此關係

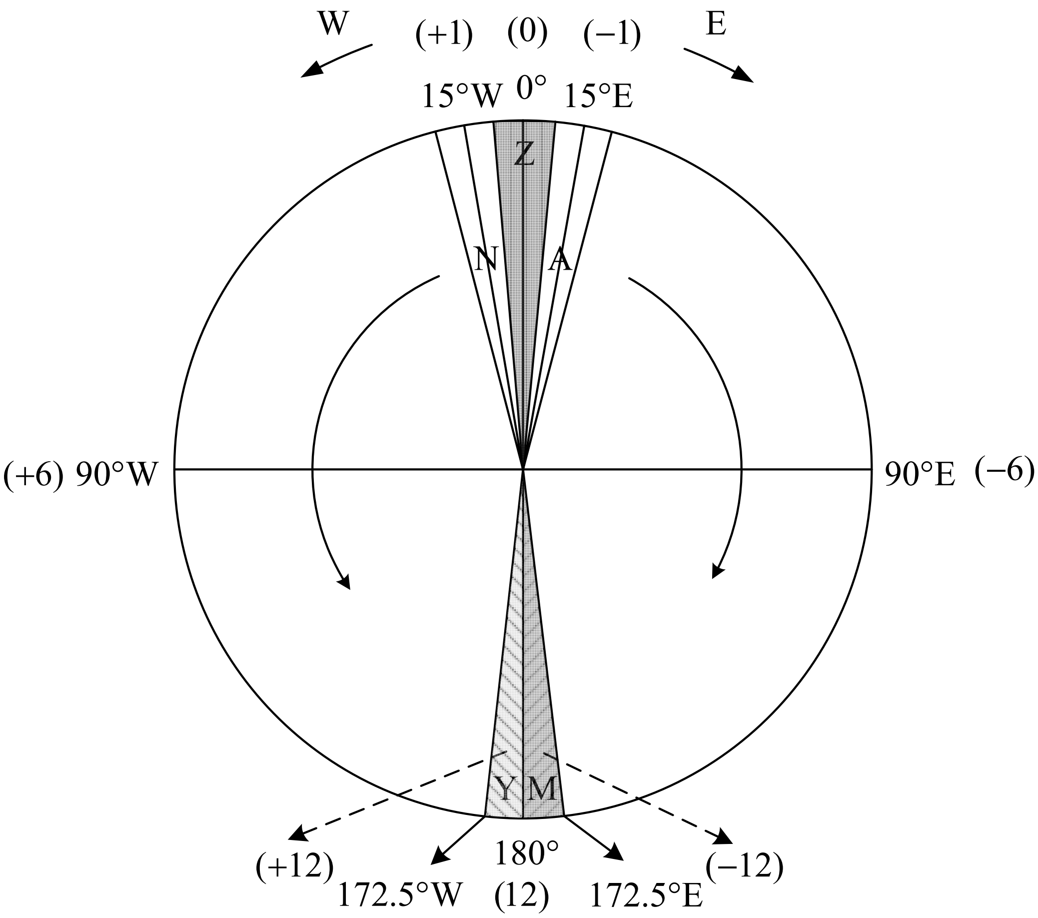


圖 4- 1 全球時區圖

1. LMT 與 GMT 之關係：
   $LMT \pm \lambda = GMT$
   其中，λ 為時間單位；符號東-西+。
2. 平均太陽係由東向西等速運行，因此於東經時 $LMT > GMT$ ；於西經： $LMT < GMT$ 。
3. 區域時（ZT）：將全世界分為 24 個區域，計有 24 條區域內標準（中央）子午線。每一個區域包括經度15°；整個區域則共同使用該區域的中央子午線之 LMT。如圖 4-1 示。
4. 全世界分為 25 個時區，如圖 4-1 示。美軍為簡化通信作業而使用英文字母代號表示時區；目前為各國政府通用，其代號使用法為：
   (1) 格林威治時區用 Z 表示。
   (2) 東經由 A 至 M，其中 J 不使用。
   (3) 西經由 N 到 Y。

注意：

(1) 以格林威治子午線為中央子午線之時區，稱為零時區。

(2) 中原標準時間就是吾人以120°E 為中央子午線之時區所使用之時間；該時區即(-)8 時區，用 H 表之。

(3) 180°之子午線，稱為國際換日線（International Date Line）。以180°為中央子午線之區域被分為兩部份，在東經部份為(-)12 時區；在西經部份為(+)12 時區。兩者涵蓋範圍只有 7.5°而不是15°。

5. 時區標號(Zone Description, ZD)：亦稱時區誌。其計算法如下：

將經度除以15°，若餘數 < 7.5° 則 $|ZD| =$ 商數；

而若餘數 > 7.5° 則 $|ZD| =$ 商數+1。

6. ZT 與 GMT 之關係：

$$ZT + ZD = GMT$$

7. LMT 與 ZT 之關係：

$$LMT \pm d_{\lambda} = ZT$$

其中，d_{λ}：當地子午線與時區中央子午線之經度差，其最大值為$7.5° = 30^{m}$，以中央子午線為基準（東－西＋）。

8. 船舶航行時之時間調整

(1) 船舶向東航行過時區界線，時間撥快（即加上）1 小時；
過國際換日線，日期減一日。

(2) 船舶向西航行過時區界線，時間撥慢（即減去）1 小時；
過國際換日線，日期加一日。

9. 時間圖解（Time Diagram）

時間圖解，如圖 4-2 示，類似天赤道平面投影圖，亦屬於極正射切面投影，其用途在於解算日期與時間，繪製要點如下：

(1) 從天南極之外太空（South Pole Uppermost）看地球；

(2) 直徑為子午線，實線為上半圈，虛線為下半圈；

(3) 半徑為時圈；

(4) 反時針方向為向西，表天體視運動方向。

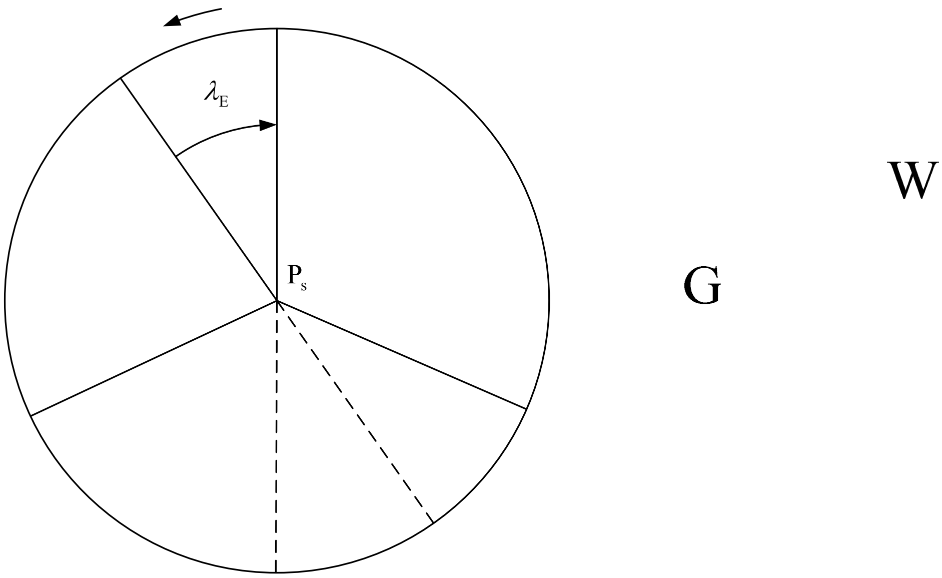


圖 4-2 時間圖解圖

注意：太陽在兩地下子午線間，兩地日期不同

題目：

(1) 于 10 月 26 日，某船在 λ 117°19.4′ W，從航海曆查得日出之 LMT 0658，求日出時之 ZT 及日期。

(2) 某船在 λ 38°58.5′ E，從航海曆查得日沒時間為 1 月 26 日 LMT 2345，求日沒之 ZT 及日期。

(3) 于 3 月 31 日 LMT 1838 時，某船經度為 179°30.0′ W，航向 270°，4 小時後抵達經度 178°30.0′ E，則該時之當地平均時 (LMT) 及日期？

(4) 于 4 月 1 日 ZT 1938 時，某船經度為 178°30.0′ E，航向 090°，4 小時後抵達經度 179°30.0′ W，則該時之區域時 (ZT) 及日期？

10. 於觀測天體之完整解算時，須記下觀測時間與日期，透過航海曆每日頁查出格林威治時角（GHA），查表計算時，選用假定船位之經度，以獲得一整數度之當地時角（LHA），其程序如下：

$$ZT \longrightarrow GMT \xrightarrow{N.A.} GHA \xrightarrow{\lambda} LHA$$

11. 求中天時間的 GHA 法，適用於所有天體，其觀念與觀測時間之轉換同出一轍，只是其**運算步驟顛倒**，由於中天時 LHA 為 000°或 360°，且經度為已知，故可求出格林威治時角（GHA），再透過航海曆每日頁查出格林威治平均時（GMT），進而求得中天時間，其程序如下：

$$LHA \xrightarrow{\lambda} GHA \xrightarrow{N.A.} GMT \longrightarrow ZT$$

4.4 時間基本種類

1. 世界時（Universal Time, UT）：格林威治子午線為標準之平均太陽時。
2. 零號世界時（UT0）：直接由天文觀測而得者。
3. 一號世界時（UT1）：UT0 經極運動（Polar Motion）修正而得。天航所用的 GMT，即為 UT1。
4. 二號世界時(UT2)：UT1 經地球自轉速率之季節性變化修正而得。國際無線電時間信號廣播採用 UT2 為 UTC。
5. 協調世界時（Coordinated Universal Time, UTC）：將原子時間（AT）加以修正 （即作閏秒處理），使與 UT1（等同於 GMT）之差不超過 0.9 秒之時間。
6. 原子時間（Atomic Time, AT）：由於銫原子（ Cs^{133} ）振盪器之振盪頻率極為穩定，因此以 Cs^{133} 每振盪 9,192,631,770 次為一秒之時間。即將原子時間作閏秒 （Leap Second）處理，使與 UT1 相差不超過 0.9 秒之時間，稱為協調世界時（UTC）。

4.5 錶差與錶差率

1. 誤差（Error）：快（Fast, F）；慢（Slow, S）
2. 差率 （Rate）：增（Gaining）；損（Losing）

題目：

(1) 欲求天文鐘之差率（Chronometer Rate）。於不同日期接收至相同時間信號（Time Signal），於 4 月 6 日天文鐘為 5-25-05；於 4 月 16 日天文鐘為 5-25-51，時間信號為 1700 UTC。

(2) 欲求天文鐘之差率（Chronometer Rate）。以天文鐘（Chronometer）直接與 Washington D.C. λ ：77°03.9′W ZT 1200 無線電報時信號比較，於 3 月 30 日天文鐘為 4-55-12；4 月 9 日天文鐘為 4-54-36。

補充說明－計時方式

(1) 計時系統中，時間的標準化是科學界關注的議題。目前計時方式（或秒的定義）係以銫（Cesium）原子震盪 9,192,631,770 次為一秒之時間。該成果的發表者 Norman F. Ramsey，因此榮獲 1989 年諾貝爾物理獎。

(2) 根據愛因斯坦的假設：光在真空中的速度是恆定的。據此，John L. Hall 及 Theodor W. Hänsch 共同發展出以光為精確的量測工具，即光頻梳（Optical Frequency Comb

Technique)，而榮獲 2005 年諾貝爾物理獎；亦使得未來計時方式可能有所改變。

(3) 由於地球自轉逐漸以不規則的速度減緩，因此須作閏秒（Leap Second）調整。該調整係由聯合國國際電信聯盟（International Telecommunications Union , ITU）負責發佈；於每年之 6 月 30 或 12 月 31 調整。又近五年來，對於「是否廢除閏秒調整」該議題，不同領域的專家學者，各有爭論。

第5章、中天求緯

題型：已知天體觀測高度及其方位，以及赤緯，求中天時觀測者緯度。

解算：使用天子午線平面圖求解步驟如下：

步驟 1. 將天體觀測高度及方位描繪至天水平座標系統。

步驟 2. 透過天體赤緯將天赤道座標系統併入。

步驟 3. 由天子午線平面圖圖解得知。

概分：

1. 上中天（zd 及 Dec 求解）
   (1) Lat 與 Dec 同名，且 Lat 大於 Dec：$Lat = zd + Dec$；
   (2) Lat 與 Dec 同名，且 Lat 小於 Dec：$Lat = Dec - zd$；
   (3) Lat 與 Dec 異名：$Lat = zd - Dec$。
2. 下中天（pd 及 Ho 求解）
   $Lat = pd + Ho$，
   注意：Lat 與 Dec 必同名。
3. 綜合題（包含上中天與下中天），如例題示。

例題：某船迷失船位，在一荒島錨泊，測得某一星高度80°，約11^h58^m後再測該星高度20°，兩次觀測方位均為正南，求該星之 Dec 與船位之 Lat？

註：中天求緯亦稱為中天高度之解算（Solution for Meridian Altitude）

第6章、單一天體情境的計算方法

6.1 基本公式之建構

首先，將天球（Celestial Sphere）視為一單位球，由於天赤道座標系統（Celestial Equator Coordinate System）是地球座標系統（Earth Coordinate System）的擴大。據此，從航海人員的觀點，將描述地球座標系統的位置量數，如緯度與經度，和天赤道座標系統的位置量數，如赤緯與時角，取代數學慣用的球面座標系統，準此，則天球上任一點 P 在直角座標系統的位置向量表達式如下述：

$$\bar{P} = [\cos L \cdot \cos\lambda,\ \cos L \cdot \sin\lambda,\ \sin L] \quad \text{（地球座標系統）} \qquad (6\text{-}1)$$

$$= [\cos d \cdot \cos HA,\ \cos d \cdot \sin HA,\ \sin d] \quad \text{（天赤道座標系統）} \qquad (6\text{-}2)$$

其中，L：觀測者緯度（Latitude of Observer）；λ：觀測者經度（Longitude of Observer）；d ：天體赤緯（Declination of Celestial Body）；HA ：天體時角（Hour Angle of Celestial Body）。

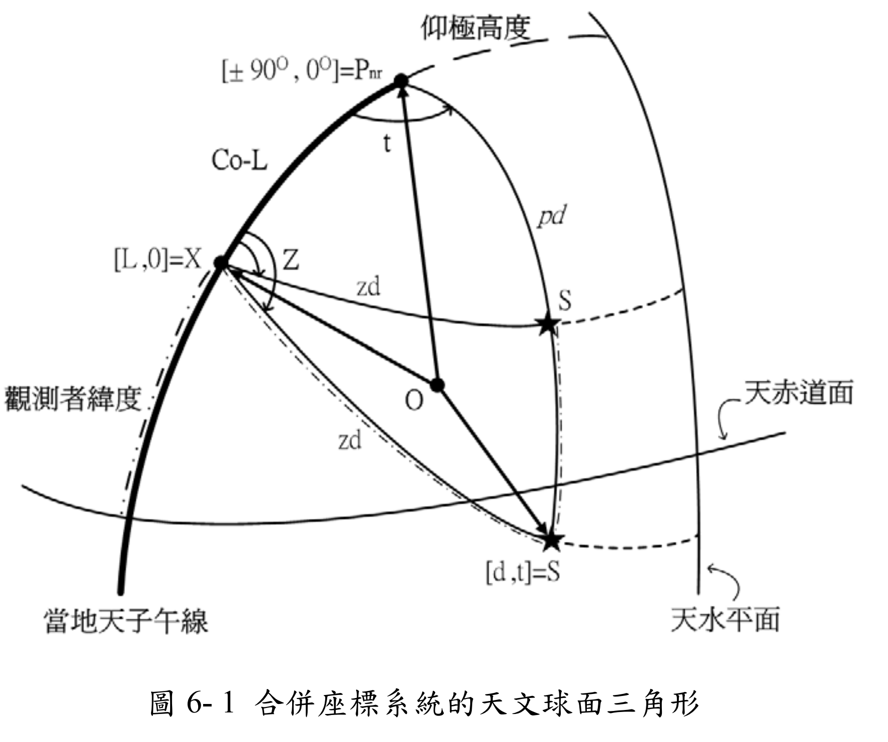


圖 6- 1 合併座標系統的天文球面三角形

由於座標系統已固定，因此，對於緯度或赤緯，符號為北者，其值為正，而符號為南者，其值為負。進而，採相對（天）子午線概念，以當地（天）子午線，取代格林威治（天）子午線，進行座標轉換，如圖 6-1 所示。天頂（Zenith）（或觀測者），天體 （Celestial Body）（或

地理位置）及仰極（Elevated Pole）（或地極）的位置向量分別表達如下：

$$\bar{X}=[\cos L, 0, \sin L] \text{，} \tag{6-3}$$

$$\bar{S}=[\cos d\cdot\cos t, \cos d\cdot\sin t, \sin d] \text{，} \tag{6-4}$$

$$\bar{P}_{nr}=[0, 0, \pm 1] \tag{6-5}$$

其中，t：子午角（Meridian Angle），其值為觀測者經度與天體時角之差，其符號則依天文航海學的慣例。

運用「觀測者的緯度等於仰極的高度」此一重要概念，合併天赤道座標系統和天水平座標系統（Celestial Horizon Coordinate System），即將描述以觀測者為主的天水平座標系統的位置量數，如高度與方位角，置入於天球上，至此，天文三角形（Astronomical Triangle）於焉產生，其三點、三邊及三角如圖 6-1 所示。

1. 天體等高度方程式

如圖 6-1 所示，單位向量 $\bar{X}$ 和 $\bar{S}$ 的夾角（球面三角的邊），即為天頂距（Zenith Distance, zd），而天體必須在天水平上方被觀測到，因此天頂距又稱為餘高。根據向量內積的幾何及代數定義分別表示如下：

$$\bar{X}\cdot\bar{S}=1\cdot 1\cdot\cos(zd)=\sin H \text{（幾何定義）}$$
$$=\cos L\cdot\cos d\cdot\cos t+\sin L\cdot\sin d \text{（代數定義），}$$

整理可得，

$$\sin H=\sin L\cdot\sin d+\cos L\cdot\cos d\cdot\cos t \text{，} \tag{6-6}$$

其中，H：高度（Altitude）。該公式即為所熟知的球三**邊餘弦公式**，由於球面三角許多公式皆為該式的推論或衍生如半正矢公式等，因此，它被視為天文航海學中的基本公式（Basic Formula）。

2. 天體方位方程式

在不同情境下，有不同天體方位方程式，分別敘述如下：

(1) **高度－方位方程式**（Altitude Azimuth Equation）：

如圖 6-1 示，球面三角邊餘弦公式成立如下：

$$\cos(pd) = \sin L \cdot \cos(zd) + \cos L \cdot \sin(zd) \cdot \cos Z \qquad (6\text{-}7)$$

其中，pd：極距（Polar Distance）；Z：方位角（Azimuth Angle）。因為

$pd = 90^o \mp d$ 和 $zd = 90^o - H$，

代入方程式(6-7)，整理得：

$$\sin d = \sin L \cdot \sin H + \cos L \cdot \cos H \cdot \cos Z \text{，} \qquad (6\text{-}8)$$

欲求方位角，故移項整理如下：

$$\cos Z = \frac{\sin d - \sin L \cdot \sin H}{\cos L \cdot \cos H} \text{。} \qquad (6\text{-}9)$$

該式為球三**邊餘弦公式之變型**，在高度已知情況下，可透過該式求得方位，故在天文航海學中謂之為高度－方位方程式。

(2) **時間和高度－方位方程式**（Time and Altitude Azimuth Equation）：

如圖 6-1 所示，方位角係為$\left(\vec{X} \times \vec{S}\right)$及$\left(\vec{X} \times \vec{P}_{nr}\right)$兩單位向量的夾角（球三的角）。根據向量外積的幾何和代數定義分別表示如下：

$$\left\|\vec{X} \times \vec{S}\right| \times \left|\vec{X} \times \vec{P}_{nr}\right\|$$

$$= \left\|\left[\sin(zd) \cdot \sin(Co - L) \cdot \sin(Z)\right]\vec{X}\right| = \cos H \cdot \cos L \cdot \sin Z \text{（幾何定義）}$$

$$= \left\|\left[(\vec{X} \times \vec{S}) \cdot \vec{P}_{nr}\right]\vec{X}\right| = \cos L \cdot \cos d \cdot \sin t \text{（代數定義），}$$

整理可得，

$$\cos H \cdot \sin Z = \cos d \cdot \sin t \text{。} \qquad (6\text{-}10)$$

該式為球三**正弦公式**，而在天文航海學中則稱為時間和高度－方位方程式。又式(6-6)與式(6-10)合稱為正弦－餘弦方程組（Sine-cosine Equations）或典型方程組。

(3) **時間－方位方程式**（Time Azimuth Equation）：
將方程式(6-6)和方程式(6-10)代入方程式(6-8)可得

$$\sin d = (\sin d \cdot \sin L + \cos d \cdot \cos L \cdot \cos t) \cdot \sin L + (\frac{\cos d \cdot \sin t}{\sin Z}) \cdot \cos L \cdot \cos Z \text{ ，}$$

移項整理

$$\sin d \cdot (1 - \sin^2 L) = (\cos d \cdot \cos L \cdot \cos t \cdot \sin L) + \cos d \cdot \sin t \cdot \cos L \cdot \cot Z \text{ ，}$$

等號兩邊同除 $\cos d \cdot \cos L$ 可得

$$\tan d \cdot \cos L = \cos t \cdot \sin L + \sin t \cdot \cot Z \text{ ，}$$

移項整理後可得

$$\tan Z = \frac{\sin t}{(\cos L \cdot \tan d) - (\sin L \cdot \cos t)} \text{ 。} \qquad (6\text{-}11)$$

該式為球三**四鄰公式**，在高度為未知情境下，可透過該式求得方位，一般用於觀測天體方位以校正羅經差，在天文航海學中謂之為時間－方位方程式。

6.2 求解天文位置線的計算方法

1. 截距法的直接計算方法
   最適當公式組合即為式(6-6)及式(6-11)，此兩公式即是 229 表的製表公式。
2. 不用截距的計算程序
   選擇式(6-10)及式(6-6)之組合可推導出計算程序，該程序可作為迭代計算式，具有驗證其他方法論的功用。

第7章、雙天體情境計算方法

天文航海的典型問題，係在已知時間下，觀測兩個天體高度來決定天文觀測船位，可簡稱為雙天體觀測高度情境。其包括兩種狀況，一為同時或近乎同時觀測到兩天體高度；另一為在不同時間觀測到同一或不同天體高度。對於後者之狀況，使用航進定位（Running Fix）的觀念，依航向、航速和兩次觀測時間間距，則使用適當航法（一般採用恆向線航法），**移動參考位**置，一般言之，高高度觀測係指天體的地理位置，而截距法則是假設位置，使得後者狀況轉為前者狀況。

7.1 球三法

已知兩等高度圈的圓心為天體的地理位置 S_1 和 S_2 ，其半徑為 zd_1 和 zd_2 。設兩等高度圈的兩交點分別為 P_1 和 P_2 ，其中之一即為天文觀測船位（P）。使用大圈連接 P_{nr} 、S_1 及 S_2 。如圖 7-1 所示。至此，已知兩天體的天頂距（即 zd_1 和 zd_2 ）、極距（即 pd_1 和 pd_2 ）以及兩天體的時角差（ HA ）。

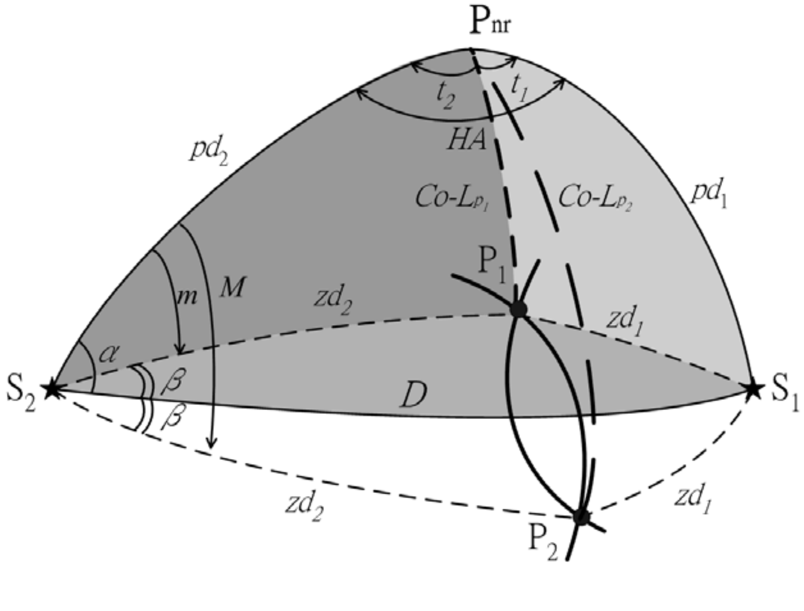


圖 7- 1 球三法決定天文觀測船位示意圖

球三法之求解過程說明如下：

步驟1. 在 $\widehat{\Delta}\, P_{nr}\ S_2\ S_1$ 中，已知 pd_1 、 pd_2 和 HA，求兩天體的大圈距離（D）。

步驟2. 在 $\widehat{\Delta}\, P_{nr}\ S_2\ S_1$ 中，已知 pd_1 、 pd_2 和 HA 或 pd_1 、 pd_2 和 D，求 S_2 的天體角（ α ）。

步驟3. 在 $\widehat{\Delta}\, P\ S_2\ S_1$ 中，已知 zd_1 、 zd_2 和 D，求 β 。

步驟4. 對船位 P_1，在 $\widehat{\Delta}\ P_{nr}\ S_2\ P_1$ 中，$m=\alpha-\beta$，若對船位 P_2，在 $\widehat{\Delta}\ P_{nr}\ S_2\ P_2$ 中，$M=\alpha+\beta$。

步驟5. 在 $\widehat{\Delta}\ P_{nr}\ S_2\ P_1$（或 $\widehat{\Delta}\ P_{nr}\ S_2\ P_2$），已知 pd_2，zd_2 和 m（或 M），則可求得天文觀測船位之緯度 L_1 和 L_2。

步驟6. 在 $\widehat{\Delta}\ P_{nr}\ S_2\ P_1$（或 $\widehat{\Delta}\ P_{nr}\ S_2\ P_2$），已知 pd_2，zd_2 和 m（或 M）以及 pd_2，zd_2 和 L_1（或 L_2），求得天體 S_2 的子午角，再換算可得天文觀測船位之經度 λ_1（和 λ_2）。

除步驟 4 外，各步驟的球三公式之選擇，皆是三邊和一角的關係式。因此，在不考量誤差傳播特性下，各步驟均可使用球三邊餘弦公式。綜言之，球三法的求解方法係採用三角方程式，然在建立方程式的計算程序時，其本質則是間接求解過程。

7.2 矩陣法

地球座標系統的觀測船位在直角座標系統的向量表達式如下：

$$\bar{P}=[X,Y,Z]=[\cos L\cdot\cos\lambda,\ \cos L\cdot\sin\lambda,\ \sin L]$$

其中，L ：觀測船位的緯度；λ：觀測船位的經度。

同理，天赤道座標系統的天體位置在直角座標系統的向量表達式如下：

$$\bar{E}=[x,y,z]=[\cos d\cdot\cos G,\ \cos d\cdot\sin G,\ \sin d]$$

其中，d 為天體位置的赤緯，G 為天體位置的格林威治時角。

兩單位向量的夾角即為觀測餘高因此，兩者內積可得：

$$\bar{E}\cdot\bar{P}=\cos(90^{o}-H)=\sin H=h$$

其中，H 為觀測高度。

假設同時（或近乎同時）觀測兩天體並得其觀測高度，又地球座標系統的觀測船位即是天水平座標系統的天頂（Zenith），從觀測者角度言之，表示天頂的觀測高度必為 90° ，因此，三式聯合表達如下：

$$\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ X & Y & Z \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

改以矩陣方式表達如下：

$$E\cdot P=H$$

其中，E：天赤道座標系統的天體位置矩陣。
P：地球座標系統的觀測船位向量。
H：天水平座標系統的天體觀測高度向量。

上式的天文航海意義，即表示三個座標系統在天球上的組合方程組。綜言之，矩陣法在建構方程式模型時相當直接，然在求解方法上，無論是代數解或分析解，其本質則採用平面分析幾何學，造成求解過程的困難。

7.3 聯立等高度方程組（Simultaneous Equal-altitude Equation Method, SEEM）

矩陣法與聯立等高度方程組雖同為直接求解方法，不同之處在於前者轉換至直角座標求解，會有虛根產生，而後者則是在球面座標上直接求解，不會產生虛根。

天文觀測船位的各種計算方法之關係如圖 7-2 所示：

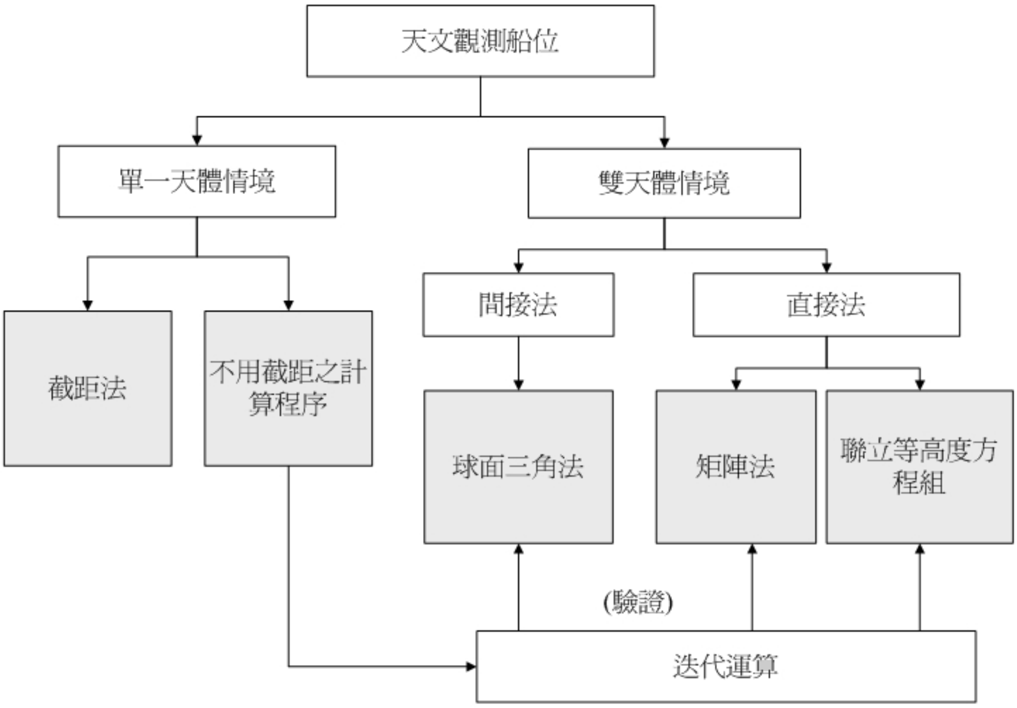


圖 7- 2 天文觀測船位的各種計算方法之關係圖

註：第 6 章與第 7 章之詳細內容可參考

Hsu, T.P., Chen, C.L. and Chang, J.R. 2005, New Computational Methods for Solving Problems of the Astronomical Vessel Position, *The Journal of Navigation*, Vol. 58, No.2, pp. 315-335. ***(EI, SCI)***